2 Questions à choix unique

A-2. C'est la définition : l'intervalle entre deux sons est le rapport de leurs fréquence fondamentales.

B-1. C'est la définition d'une quinte.

C-3. La quinte d'un son de fréquence f a pour fréquence $\frac{3}{2}f$.

La quinte d'un son de fréquence $\frac{3}{2}f$ a pour fréquence $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}f$.

Puisque $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}f=\frac{9}{4}f$, la fréquence du son obtenu est bien : $\frac{9}{4}f$.

D-3. Il y a deux demi-tons entre le *do* et le *ré* : celui entre *do* et *do*#, et celui entre *do*# et *ré*.

L'intervalle entre deux demi-tons dans la gamme tempérée est $\sqrt[12]{2}$, donc l'intervalle entre le *do* et le *ré* est $\sqrt[12]{2}\times\sqrt[12]{2}$, c'est-à-dire $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$.

E-2. L'écart entre le sol_2 et le do_3 de la gamme tempérée est de 5 demi-tons :

sol_2-sol_2# ; sol_2#-la_2 ; la_2-la_2# ; la_2#-si_2 ; si_2-do_3.

Chaque demi-ton a pour valeur $\sqrt[12]{2}$ dans la gamme tempérée.

On passe donc de la fréquence du sol_2 à la fréquence du do_3 en multipliant la fréquence du sol_2 par $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$.

On calcule donc : $196\times\left(\sqrt[12]{2}\right)^5\approx 261$.

La fréquence du do_3 est 261 Hz, à 1 Hz près.

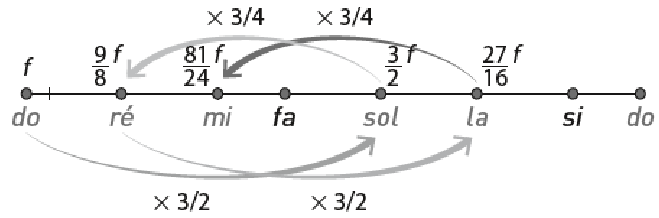
7 Compléter un schéma

L'intervalle *do-sol* est une quinte, donc la fréquence du *sol* est $\frac{3}{2}f$.

L'intervalle *sol-ré* est une quinte suivie d'une octave descendante (réduction à l'octave), donc la fréquence de la note est multipliée par $\frac{3}{2}$ puis $\frac{1}{2}$, soit $\frac{3}{4}$.

La fréquence du *ré* est donc : $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}f=\frac{9}{8}f$.

L'intervalle *ré-la* est une quinte, donc la fréquence de la note est multipliée par $\frac{3}{2}$: la fréquence du *la* est : $\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}f=\frac{27}{16}f$.



8 Construction d'une gamme avec des quintes descendantes

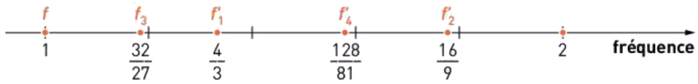
1. L'intervalle entre 1 et f_1 est une quinte : on a $\frac{1}{f_1}=\frac{3}{2}$, d'où $3f_1=2$ et $\boldsymbol{f_1=\frac{2}{3}}$.

2. $\frac{2}{3}$ n'est pas compris entre 1 et 2. On calcule donc la fréquence de la note à l'octave supérieure en multipliant f_1 par 2. On obtient $\boldsymbol{f'_1=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}}$.

3. On calcule $f_2=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$. Puisque $\frac{8}{9}$ n'est pas compris entre 1 et 2, on multiplie cette fréquence par 2, d'où la fréquence $\boldsymbol{f'_2=\frac{16}{9}}$.

On calcule ensuite $\boldsymbol{f_3=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}}$, qui est comprise entre 1 et 2.

Puis on calcule $f_4=\frac{2}{3}\times\frac{32}{27}=\frac{64}{81}$, que l'on ramène à $\boldsymbol{f'_4=2\times\frac{64}{81}=\frac{128}{81}}$.



4. On a obtenu cinq notes de fréquences : f, f'_1, f'_2, f_3 et f'_4. La note suivante obtenue par cette méthode a pour fréquence $f_5=\frac{2}{3}\times\frac{128}{81}=\frac{256}{243}$, soit $f_5\approx 1{,}05$. Donc cette note est voisine de la note de départ : on a constitué une gamme acceptable.

9 Calculs de fréquences dans des gammes différentes

1. a. L'intervalle la_3-la_4 est une octave, donc le rapport de la fréquence du la_4 sur la fréquence du la_3 est 2 : ainsi, la fréquence du la_4 est la double de celle du la_3.

La fréquence du la_4 est 880 Hz car $440\times 2=880$.

b. Pour chaque octave, la fréquence est multipliée par 2.

Soit f la fréquence du la_1 ; la fréquence du la_2 est $2f$, et la fréquence du la_3 est $2\times 2f=4f$.

Ainsi : $4f=440$, soit $f=110$ Hz.

La fréquence du la_1 est 110 Hz.

2. On passe du la_3 à mi_4 par une quinte, donc on multiplie la fréquence du la_3 par $\frac{3}{2}$ pour obtenir la fréquence du mi_4.

La fréquence du mi_4 est ainsi 660 Hz car $440\times\frac{3}{2}=660$.

3. Il y a sept demi-tons entre *la* et *mi* : *la-la#* ; *la#-si* ; *si-do* ; *do-do#* ; *do#-ré* ; *ré-ré#* ; *ré#-mi*.

Chaque demi-ton a pour valeur $\sqrt[12]{2}$ dans la gamme tempérée.

On passe donc de la fréquence du la_3 à celle du mi_4 en multipliant la fréquence du la_3 par $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$.

On calcule : $440 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 659{,}2$.

La fréquence du mi_4 dans la gamme tempérée est 659,2 Hz, à 0,1 Hz près.

On remarque que les résultats obtenus dans les deux gammes sont très proches.

11 Un programme pour les gammes pythagoriciennes

1. a. On complète le programme donné.

```python
# Cycle pythagoricien de n quintes
def cyclepytha(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        a=L[i]*3/2
        if a>=2:
            a=a/2
        L.append(a)
    return(L)
```

La variable *a* contient les valeurs des fréquences successives. Le test « $a \geqslant 2$ » permet d'effectuer si besoin la réduction à l'octave.

Les valeurs des fréquences successives sont stockées dans la liste L.

b. On obtient les résultats en page ci-contre.

On constate que, pour $n = 53$, la gamme reboucle presque, puisque la dernière fréquence obtenue est environ 1,002, soit un écart de 2/1 000 par rapport à la fréquence initiale.

2. a. Le programme Python ci-dessous répond à la question.

```python
# Meilleure gamme
def meilleuregammepytha(p):
    a=3/2
    n=1
    while abs(a-1)>10**-p:
        a=a*3/2
        if a>=2:
            a=a/2
        n=n+1
    return(n,a)
```

La variable *a* contient les fréquences successives des notes de la gamme. L'instruction « while abs(a – 1) > 10^{-p} » teste si l'écart entre la valeur a de la fréquence et la fréquence initiale 1 dépasse ou non 10^{-p}. Le programme affiche la première valeur de *n,* qui est solution, ainsi que la fréquence *a* « proche » de 1 obtenue.

*Résultats de la question **1. b** :*

```
>>> cyclepytha(12)
[1, 1.5, 1.125, 1.6875, 1.265625, 1.8984375, 1.423828125, 1.06787109375, 1.601806640625, 1
.20135498046875, 1.802032470703125, 1.3515243530273438, 1.0136432647705078]
>>> cyclepytha(27)
[1, 1.5, 1.125, 1.6875, 1.265625, 1.8984375, 1.423828125, 1.06787109375, 1.601806640625, 1
.20135498046875, 1.802032470703125, 1.3515243530273438, 1.0136432647705078, 1.5204648971557617, 1
.1403486728668213, 1.710523009300232, 1.282892256975174, 1.924338385462761, 1.4432537890970707, 1
.082440341822803, 1.6236605127342045, 1.2177453845506534, 1.82661807682598, 1.369963557619485, 1
.0274726682146138, 1.5412090023219207, 1.1559067517414405, 1.7338601276121608]

>>> cyclepytha(53)
[1, 1.5, 1.125, 1.6875, 1.265625, 1.8984375, 1.423828125, 1.06787109375, 1.601806640625, 1
.20135498046875, 1.802032470703125, 1.3515243530273438, 1.0136432647705078, 1.5204648971557617, 1
.1403486728668213, 1.710523009300232, 1.282892256975174, 1.924338385462761, 1.4432537890970707, 1
.082440341822803, 1.6236605127342045, 1.2177453845506534, 1.82661807682598, 1.369963557619485, 1
.0274726682146138, 1.5412090023219207, 1.1559067517414405, 1.7338601276121608, 1.3003950957091206, 1
.950592643563681, 1.4629444826727607, 1.0972083620045705, 1.6458125430068558, 1.2343594072551418, 1
.8515391108827126, 1.3886543331620345, 1.0414907498715258, 1.5622361248072887, 1.1716770936054666, 1
.7575156404082, 1.31813673030615, 1.977205095459225, 1.4829038215944188, 1.1121778661958142, 1
.6682667992937212, 1.251200099470291, 1.8768001492054365, 1.4076001119040773, 1.055700083928058, 1
.5835501258920868, 1.187662594419065, 1.7814938916285976, 1.3361204187214482, 1.0020903140410862]
```

b. Pour $p = 2$, on trouve $n = 53$.

Pour $p = 3$, on trouve $n = 665$.

```
>>> meilleuregammepytha(2)
(53, 1.0020903140410862)
>>> meilleuregammepytha(3)
(665, 1.0000436550634442)
```

La gamme formée de 53 quintes est appelée la gamme des solfèges : elle est utilisée uniquement dans un but pédagogique dans les cours de solfège pour faire comprendre l'existence de deux types de demi-tons : le demi-ton diatonique (intervalle entre deux notes de noms différents, comme *do* et *ré*♭) et le demi-ton chromatique (intervalle entre deux notes de même nom, comme *do* et *do*#), tous deux séparés par le comma de valeur approchée 1,002 09 (voir le résultat donné par le programme Python ci-dessus).

La gamme formée de 665 quintes ne présente évidemment aucun intérêt.

13 Les quintes et les quartes alternées

1. Par définition d'une quinte : $f_1 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$.

Pour trouver la fréquence f_2 du son se situant une quarte en dessous du son de fréquence f_1, il suffit de voir que l'on passe du son de fréquence f_2 à celui de fréquence f_1 par une quarte, donc le rapport $\frac{f_1}{f_2} = \frac{4}{3}$, soit $3\,f_1 = 4\,f_2$ et ainsi $f_2 = \frac{3}{4}\,f_1$.

On en déduit : $f_2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$.

2. On continue les calculs en multipliant chaque fréquence par $\frac{3}{2}$ dans le cas d'une quinte et par $\frac{3}{4}$ dans le cas d'une quarte (descendante).

Ainsi : $f_3 = \frac{3}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$.

Puis : $f_4 = \frac{3}{4} \times \frac{27}{16} = \frac{81}{64}$; $f_5 = \frac{3}{2} \times \frac{81}{64} = \frac{243}{128}$;

$f_6 = \frac{3}{4} \times \frac{243}{128} = \frac{729}{512}$; $f_7 = \frac{3}{2} \times \frac{729}{512} = \frac{2\,187}{1024}$.

On remarque que descendre d'une quarte revient à monter d'une quinte et descendre d'une octave. En effet, multiplier par $\frac{3}{4}$, c'est comme multiplier par $\frac{3}{2}$ et diviser par 2 (réduction à l'octave). On obtient donc la même gamme que la gamme pythagoricienne.

16 Une formule pour la gamme tempérée

1. Les notes *la*$_3$ et *do*$_4$ sont séparées par 3 demi-tons : *la*-*la*# ; *la*#-*si* et *si*-*do*.

La valeur d'un demi-ton est $\sqrt[12]{2}$, donc la fréquence du *do*$_4$ s'obtient en multipliant la fréquence du *la*$_3$ par $\left(\sqrt[12]{2}\right)^3$: $440 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \approx 523{,}25$ Hz à 10^{-2} près.

La note *do*$_3$ est une octave en dessous de la note *do*$_4$, donc sa fréquence vaut la moitié de la fréquence du *do*$_4$, soit 261,63 Hz à 10^{-2} près.

2. Soit $a = \sqrt[12]{2}$. La fréquence d'une note située n demi-tons au-dessus du *la*$_3$ est, de la même façon : $440 \times a^n$.

La fréquence d'une note située n demi-tons au-dessous du *la*$_3$ est : $\frac{440}{a^n} = 440\,a^{-n}$.

Dans tous les cas, la fréquence d'une telle note est : $440 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$, n étant compté positivement ou négativement.

3. On peut compter les touches du clavier, puisque chaque touche correspond à un demi-ton : il y en a 39 à partir du *la*$_3$, donc la fréquence de la note associée à la plus haute touche du clavier est donnée par : $440 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^{39} \approx 4\,186$ Hz.

On peut aussi dire qu'il s'agit du *do*$_7$, et sa fréquence se calcule à partir de celle du *do*$_4$:

$523{,}25 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 4\,186$ Hz.

18 Un cycle des quintes particulier

1. La note *ré*$_4$ étant à l'octave de la note *ré*$_3$, sa fréquence est le double de la fréquence du *ré*$_3$. Elle a pour fréquence : $294 \times 2 = 588$ Hz.

2. Le son S étant situé à une quinte ascendante du *ré*$_3$, sa fréquence s'obtient en multipliant la fréquence du *ré*$_3$ par $\frac{3}{2}$:

il a donc pour fréquence $294 \times \frac{3}{2} = 441$ Hz.

3. a. On utilise la même méthode que précédemment.

La fréquence de ce son est : $441 \times \frac{3}{2} = 6\,615$ Hz.

b. Il n'appartient pas à la même octave que les précédents car sa fréquence 661,5 Hz est supérieure à 588 Hz.

c. Pour le ramener dans l'octave on divise sa fréquence par 2, et on obtient la fréquence $f_1 = 330{,}75$ Hz.

19 Un tableau de fréquences

1. On calcule chacun des intervalles pour l'octave 0 :

$\frac{34{,}65}{32{,}70} \approx 1{,}0596$; $\frac{36{,}71}{34{,}65} \approx 1{,}0595$;

$\frac{38{,}89}{36{,}71} \approx 1{,}0594$; $\frac{41{,}20}{38{,}89} \approx 1{,}0594$;

$\frac{43{,}65}{41{,}20} \approx 1{,}0595$; $\frac{46{,}25}{43{,}65} \approx 1{,}0596$;

$\frac{49}{46{,}25} \approx 1{,}0595$.

Ces intervalles sont sensiblement égaux, donc il s'agit d'une gamme tempérée.

Le rapport trouvé est d'ailleurs très voisin de $\sqrt[12]{2}$.

2. On lit dans le tableau la fréquence du *sol*$_4$: 784 Hz.

Puisqu'il y a deux demi-tons entre le *sol*$_4$ et le *la*$_4$, on en déduit la fréquence du *la*$_4$ dans cette gamme :

$784 \times \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \approx 880{,}01$ Hz, à 0,01 Hz près.